Analysis II

Potenzreihen

Def. Potenzreihe / Entwicklungspunkt $\sum_{K=1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$

Es sei stets $(x - x_0)^0 = 1$. Die Partialsummen sind stetige Polynome. Eine Potenzreihe ist in x = x_0 stets konvergent mit Summe a_0

Konvergenzkreis einer Potenzreihe

Satz 2.6.1

Zu jeder Potenzreihe gibt es genau ein $R \in [0, \infty[$ mit der Eigenschaft

1. Für alle x mit $|x - x_0| < R$ konvergiert die Potenzreihe absolut
2. Für alle x mit $|x - x_0| > R$ divergiert die Potenzreihe

R heißt Konvergenzradius, die Umgebung $U_R(x_0)$ der Konvergenzkreis (bzw in $\mathbb{R}$ das Konv.intervall)

Beweis: Hilfsaussage dass es für alle $|x| < |x_1|$ konvergiert mittels Majorantenkriterium. Supremum aller x für die es konvergiert.

Bemerkung: Auf dem Rande des Konvergenzkreises bzw. in den Endpunkten der konv. Intervalls kann eine Potenzreihe konvergieren oder divergieren.

Satz 2.6.2

Für den Konvergenzradius R gilt:

1. $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{k->\infty} \left| \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \right|}$ (falls der Grenzwert existiert)
2. $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{k->\infty} \sqrt[k]{a_k}}$ (ex. eventuell uneigentlich immer) (Formel von Hadamard)

Beweis: Quotientenkriterium und Wurzelkriterium

Satz 2.6.3

Eine Potenzreihe mit konv. Radius R > 0 konvergiert in jedem Abgeschlossenen Kreis $K_r(x_0)$ mit r < R gleichmäßig und definiert damit eine im gesamten konv. Bereich stetige Funktion.

Beweis: Folgt aus Majorantenkriterium mit r statt x. Stetig folgt aus einem Satz über glm. konvergenz.

Satz 2.6.4 (ABELsche Grenzwertsatz)

Eine Potenzreihe besitze einen konv. Radius > 0 und konvergiere auch in einem Punkt x_1 auf dem Rande des konv. Bereichs mit Summe s.
Dann konv. die dadurch dargestellte Funktion $x \to f(x)$ bei radialer Annäherung an x_1 gegen den Wert s. Im Falle K = $\mathbb{R}$ kann also die Funktion $x \to f(x)$ durch $f(x_1)=s$ stetig fortgesetzt werden.

Beweis: lang

Der Große Umordnungssatz

Def. Doppelfolge / Doppelreihe

Def. Anordnung einer Doppelfolge (z.B. Cantorsche Diagonalanordnung)

Satz 2.6.5 (Großer Umordnungssatz)

Für eine Doppelfolge mit der Eigenschaft: $\exists_{M\in\mathbb{R}}\forall_{l\in\mathbb{N}}\sum_{j,k=1}^{l}\left|a_{j,k}\right|\leq M$ gilt:

1. Jede Anordnung ist absolut konvergent mit stets gleicher Summe
2. Alle Zeilenreihen und alle Spaltenreihen sind absolut konvergent
3. Die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}\right)$ und $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}a_{jk}\right)$ sind absolut konvergent mit gleicher Summe wie 1.

Beweis: 1.) Partialsummen beschränkt und monoton (betrachte Beträge) 2.) analog 3.) Konvergenz analog. Gleiche Summe durch Differenz kleiner Epsilon, da Cauchyfolge.

Folgerung (Cauchy-Produktreihe)

$\sum_{k=0}^{\infty}a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty}b_k$ seien absolut konvergente Reihen mit Summen a und b. Dann konvergiert jede Anordnung der Doppelreihe absolut gegen ab insbesondere $\sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{r}a_k b_{r-k}\right)$.

Rechnen mit Potenzreihen

Satz 2.6.6 (Multiplikation von Potenzreihen)

Seinen $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ und $g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k$ zwei durch Potenzreihen dargestellte Funktionen mit Konvergenzradis R_1 und R_2. Dann wird das Produkt f(x) g(x) für $|x| < \min\{R_1,R_2\}$ durch die Cauchy-Produktreihe $\sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{r}a_k b_{r-k}\right)x^r$ dargestellt.

Beweis: Anwendung letzter Folgerung.

Bemerkung: Der genaue Konvergenzradius kann größer sein.

Satz 2.6.7 (Komposition von Potenzreihen)

Seinen $f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j x^j$ und $g(y)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k y^k$ zwei durch Potenzreihen dargestellte Funktionen mit Konvergenzradis R_1 und R_2. Dann gilt:

1. Alle Potenzen $f^k(x)$ lassen sich für $|x| < R_1$ durch Potenzreihen $\sum_{j=0}^{\infty}a_{jk}x^j$ darstellen
   [Auspotenzieren und nach Potenzen von x ordnen]
2. Ist $|a_0| < R_2$, so gibt es ein r > 0, so dass für alle x mit |x| < r die Komposition $g\circ f(x)$ durch die Potenzreihe $\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}b_k a_{jk}\right)x^j$ dargestellt wird.
   [Einsetzen und nach Potenzen von x ordnen]

Beweis: lang

Satz 2.6.8 (Division durch Potenzreihen)

Seinen $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ eine Potenzreihe mit R > 0 und $f(0) = a_0 \neq 0$. Dann gibt es ein r > 0, so dass die Funktion $x\to\frac{1}{f(x)}$ für |x| < r durch eine Potenzreihe dargestellt wird.

Beweis: Rückführung auf 2.6.7

Einfacheres Verfahren zur Bestimmung des Quotienten $\frac{f(x)}{g(x)}$ zweier Potenzreihen. Der Ansatz $\frac{\sum a_k x^k}{\sum b_k x^k} = \sum c_k x^k$ liefert $\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{r} b_k c_{r-k}\right) x^r$.

Satz 2.6.9 (Identitätssatz für Potenzreihen)

Ist $(x_l \in \dot{U}(x_0))_{l\in\mathbb{N}}$ eine gegen x_0 konvergente Punktfolge mit $\forall_{l\in\mathbb{N}}\, f(x_l) = g(x_l)$, so stimmen die Potenzreihendarstellungen von f und g überein. Insbesondere gilt $f \equiv g$ in ganz $U(x_0)$.

Beweis: Folgt aus Stetigkeit und Limes

Spezielle Funktionen

Exponentialfunktion (Aussehen, Grenzwerte)

Logarithmusfunktion (Aussehen, Grenzwerte, Umkehrung der Exponentialfunktion)

Allgemeine Potenz zur Basis a

Hyperbolischen und Area-Funktionen

cosh gerader Anteil der e-Funktion, sinh ungerader Anteil er e-Funktion
Eigenschaften (Additionsformeln)

Die Kreis und die Argumentfunktion

cos Realteil der komplexen e-Funktion sin Imaginärteil der komplexen e-Funktion.
Eigenschaften (Additionsformeln)

Für die komplexe Zahl $a = r\,e^{it}$ hat die Gleichung $z^n = a$ die n Lösungen $z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{t+2k\pi}{n}}$

Die trigonometrischen Funktionen und Arcus-Funktion

Differential- und Integralrechnung in einer Veränderlichen

Differenzierbarkeit und Ableitung

Def. Ableitung / Differentialquotient

Eine Ableitung heißt in einem Punkte diffbar, wenn dieser Grenzwert existiert.
Zwei Kennzeichnungen:
Eine Abbildung $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ ist in $x_0 \in I$ genau dann diffbar, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. Es ex. eine in x_0 stetige Abb. Δ mit $f(x) = f(x_0) + \Delta(x)(x - x_0)$
   [Dann ist $f'(x) = \Delta(x_0)$]
2. f lässt sich in x_0 linear aproximieren. d.h. es ex ein $a \in \mathbb{R}^m$, so dass
   $f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + R(x)$ mit einem Restglied, für das gilt $\lim_{x->x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$.
   [Dann ist $f'(x) = a$]

Bemerkung:

1. Δ hängt von x_0 ab. Die Existenz ist immer gesichert. Entscheidend ist die Stetigkeit in x_0.
2. Aus der Stetigkeit von Δ folgt sofort f in x_0 diffbar => f in x_0 stetig.

3. Die 2. Eigenschaft lässt sich auch mit Hilfe des landauschen o-Symbols schreiben
4. Man kann auch links und rechtsseitige Diffbarkeit definieren und eine linksseitige bzw. rechtsseitige Ableitung
5. Interpretation: m = 1: Steigung der Tangente m > 1 Geschwindigkeitsvektor der Bahnkurve

Satz 4.1.1
Eine Abbildung $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ ist in $x_0 \in I$ genau dann diffbar, wenn jede Komponentenfunktion in x_0 diffbar ist und es gilt: $f'(x_0) = \left(f_1'(x_0), \dots , f_m'(x_0) \right)$.

Satz 4.1.2 (Rechenregeln für diffbar. Funktionen)
Summenregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel

Beweis: 1-3: Differentialquotient 4: Δ Schreibweise

Satz 4.1.3
Sei f eine stetige Bijektion (insbesondere streng monoton), die in x_0 diffbar ist mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist auch die Umkehrfunktion in $f(x_0)$ diffbar mit $\left(f^{-1} \right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

Beweis: Δ Schreibweise von f umformen

Def. p-mal diffbar, p-mal stetig diffbar

Satz 4.1.4 Satz
Summe und Produkt bei p-mal diffbar

Mittelwertsatz der Differentialrechnung und seiner Anwendungen
Die folgenden Sätze sind fast alle nur für reelwertige Funktionen auf Intervallen gültig.

Der Mittelwertsatz

Def. lokal minimal, lokales Minimum / lokal maximal, lokales Maximum

Satz 4.2.1 (Notwendige Bedingung für lok. Extremum)
f in x_0 lokal extremal => $f'(x_0) = 0$

Beweis: Δ Schreibweise, Permanenzprinzip um $\Delta(x_0)$

Satz 4.2.2 (Satz von Rolle)
Sei f auf [a,b] stetig und in]a,b[diffbar. Dann gilt $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists_{\overline{x} \in]a,b[} f'(\overline{x}) = 0$

Beweis: Stetige Funktion besitzt Max oder Min Satz 4.2.1

Satz 4.2.3 (MWS der Diff.Rechnung)

Sei f auf [a,b] stetig und in]a,b[diffbar. $\exists_{\overline{x} \in]a,b[} \quad f'(\overline{x}) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

Beweis: Anwendung des Satzes von Rolle auf spezielle Funktion
Anmerkung: Gilt nicht für komplexwertige / vektorwertige Funktion

Satz 4.2.4 (Monotoniekriterium)

a) f monoton wachsend <=> $f'(x) \geq 0$
b) f streng monoton wachsend <=> $f'(x) \geq 0$ und nur auf trivialen Intervallen 0
c) f ist konstant <=> $f'(x) = 0$

Regeln von l'Hospital

Satz 4.2.5 (Erweiterter MWS der Diff-Rechnung)

Sei f,g auf [a,b] stetig und in]a,b[diffbar. $\exists_{\overline{x}\in]a,b[} \quad \frac{f'(\overline{x})}{g'(\overline{x})} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Beweis: Anwendung des Satzes von Rolle auf spezielle Funktion

Satz 4.2.6 (Regeln von l'Hospital)

Beweis: lang
Anmerkung: Gilt nicht für komplexwertige / vektorwertige Funktion.
Weitere Möglichkeit zur Berechnung von Grenzwerten ist die Potenzreihenentwicklung.

Diffbarkeit von Funktionenfolgen und Reihen

Im Allgemeinen ist die Vertauschung von Limes und Ableitung falsch, auch wenn alle Ableitungen existieren.

Satz 4.2.7

f_k sei eine Folge diffbarer Funktionen mit der Eigenschaft
1. f_k konvergiert punktweise
2. f_k' konvergiert gleichmäßig

Dann ist auch die Grenzfunktion f diffbar mit $\left(\lim_{k->\infty} f_k\right)' = \lim_{k->\infty} f_k' \quad bzw. \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'$

Beweis: Δ Schreibweise glm. konvergent Ergebnis folgt aus 2.5.2
Bemerkung: Man kann zeigen, dass unter der Vor. des Satzes auch die Folge f_k zumindest auf Kompakta glm. konvergiert.
Der Satz ist auch für R^m oder C anwendbar, wenn die Vor. komponentenweise überprüft wird.

Satz 4.2.8

Eine Potenzreihe in R mit Konvergenzradius R > 0 ist in ihrem konv. Intervall beliebig oft diffbar und ihre Ableitungen erhält man durch gliedweise Differentiation.

Beweis: Gliedweise Differenzierung liefert gleichen Konvergenzradius, auf dem die Reihe glm. konvergent.

Anwendung: Logarithmusreihe, Binomialreihe

Bemerkung: Das konv. Verhalten auf dem Rande des konv. Intervalls kann sich bei Differenzieren ändern.

Stammfunktionen

Def. unbestimmt integrierbar / Stammfunktion

Satz 4.3.1

a) Stammfunktionen sind bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Die Äquivalenzklasse aller Stammfunktionen von f heißt unbestimmtes Integral.
b) Def. bestimmtes Integral.
c) Def. Stammfunktion

Bemerkung: Nicht jede Funktion ist unbestimmt integrierbar. Auch unstetige Funktionen können Stammfunktionen besitzen.

Beispiele von Stammfunktionen

Satz 4.3.2

f + g und λ f integrierbar mit Stammfunktionen

Satz 4.3.3 (partielle Differentiation)

Beweis: Folgt aus Produktregel

Satz 4.3.4 (Substitution)

Beweis: Folgt aus Kettenregel

Satz 4.3.5 (Korollar zu Satz 4.2.7)

f_k sei eine Folge unbestimmt integrierbarer Fkt F_k eine Folge von Stammfunktionen mit

a) F_k konvergiert puntkweise
b) f_k konvergiert gleichmäßig

Dann ist die Grenzfunktion unbestimmt integrierbar mit $\int \lim\limits_{k->\infty} f_k = \lim\limits_{k->\infty} F_k + c$ *bzw.* $\int \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k = \sum\limits_{K=1}^{\infty} F_k + c$

Satz 4.3.6 (Korollar zu Satz 4.2.8)

Eine Potenzreihe in $\mathbb{R}$ mit Konvergenzradius R > 0 ist in ihrem Konvergenzintervall gliedweise unbestimmt integrierbar.

Verfahren zur Berechnung der Integrale Rationaler Funktionen (Partialbruchzerlegung).

Satz 4.3.7

Jede rationale Fkt über $\mathbb{R}$ ist elementar integrierbar. Eine Stammfunktion enthält man als Linearkombiationen rat. Fkt, Log von linearen und quadratischen Polynomen und Arctan-Gliedern von linearen Polynomen.
Schlussbemerkung: Durch geeignete Substitution lassen sich viele Integrale elementarer Fkt. auf Integrale rat. Fkt. zurückführen.

Taylorapproximation und Anwendungen

Satz 4.4.1

Es gibt genau ein Polynom höchstens vom Grade p mit $\mathop{\forall}\limits_{k=0}^{p} T_p^{(k)}(x) = f^{(k)}(x_0)$, nämlich

$T_p(x) = \sum\limits_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)\ (x-x_0)^p$, das p-te Taylorpolynom von f im Punkte x_0.
Beweis: Ansatz mit Polynom (vgl. Potenzreihe) liefert nur diese Lösung.
Bemerkung: T_p hängt von x_0 ab.

Bei einer Potenzreihe ist das p-te Taylorpolynom genau die p-te Partialsumme.

Restglied $R_p = f - T_p$ Es gilt: $\mathop{\forall}\limits_{k=0}^{p} R_p^{(k)}(x_0) = 0$ und $R_p^{(k+1)}(x_0) = f^{(p+1)}(x_0)$.

Satz 4.4.2 (TAYLORsche Satz, 1. Form)

Sei f p-mal diffbar und es ex. auch $f^{(p+1)}(x_0)$. Dann gibt es genau eine in x_0 stetige Fkt. $\Delta_{p+1} : I \to \mathbb{R}$ mit

1. $\forall_{x\in I}\ \ f(x) = T_p|_{x_0}(x) + \frac{1}{(p+1)!}\Delta_{p+1}(x)\ (x-x_0)^{p+1}$
2. $\Delta_{p+1}(x_0) = f^{(p+1)}(x_0)$

Beweis: Mehrfache Anwendung des erw. MWS auf das Restglied.
Bemerkung: Für p=0 erhält man die Kennzeichnung 1 der Diffbarkeit zurück.

Folgerung

$f(x) = T_p|_{x_0}(x) + o\left((x-x_0)^p\right)$

(Das Restglied R_p geht schneller gegen 0 als $(x-x_0)^p$)
Beweis: Umformung von (1) und (2) und Transfer p+1→p.
Bemerkung: Für p=1 erhält man die Kennzeichnung 2 der Diffbarkeit zurück.

Satz 4.4.3 (TAYLORsche Satz, 2. Form)

Sei f p+1-mal diffbar. Dann gibt es zu jedem $x \in I$ ein $\overline{x} \in \overline{x_0 x}$ mit

$$f(x) = T_p|_{x_0}(x) + \frac{1}{(p+1)!} f^{(p+1)}(\overline{x})\,(x-x_0)^{p+1}$$

Beweis: Anwendung des erw. MWS auf das Restglied.

Def. Taylorreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^k(x_0)(x-x_0)^k$$

Bemerkung: Dies ist eine Potenzreihe um x_0, die aber (außerhalb von x_0) nicht konvergieren muss.

Zum Konvergenzverhalten:

1. Die Folge der Restglieder geht gegen Null. => Die Taylorreihe kovergiert in einer Umgebung um x_0 und stellt dort die Fkt f dar.
   (Bei Funktionen, die eine Potenzreihendarstellung um x_0 besitzen, ist dies die Taylorreihe)
2. Die Folge der Restglieder konvergiert aber nicht gegen Null. => Die Taylorreihe konvergiert zwar in einer Umgebung um x_0 stellt aber nicht die Fkt f dar.
3. Die Folge der Restglieder divergiert => Die Taylorreihe divergiert (außerhalb von x_0)

Merksatz: Nicht jede C^∞ Fkt besitzt eine (konvergente) Potenzriehendarstellung.

Satz 4.4.4 (Hinreichendes Kriterium für den Idealfall)

Sei f eine C^∞ Fkt. Wenn es Konstanten M, r > 0 gibt mit $\left| f^{(k)}(x) \right| \leq M \cdot r^k$ für x $\in$I und fast alle k, dann konvergiert die Taylorreihe f in x_0 auf ganz I gegen f.

Beweis: Restgliedabschätzung

Def. reell analytische Funktionen C^ω

Potzenzreihendarstellung in jeder Umgebung $x_0 \in$ I

Satz 4.4.5

Jede durch eine Potenzreihe mit pos. Konvergenzradius R > 0 dargestellte Fkt ist in ihrem Konvergenzintervall reell analytisch.

Beweis: lang

Bemerkungen: 2. Der Konvergenzbereich der neuen Reihe kann über den alten hinausgehen
3. Die obige Transformation ist auch für komplexe Potenzreihen möglich.
4. C^ω–Fkt sind die schönsten Fkt, aber auch sehr starr: Ihr Verhalten in einer beliebig keinen Umgebung eines Punktes liefert die a_k und bestimmt vollständig ihr Verhalten auf dem ganzen Def. Bereich.

Kurvendiskussion

Monotonieverhalten
Hilfsmittel: Definition, Monotoniekriterium (Satz 4.2.1)

Lokale Extrema
Hilfsmittel: Definition, Notwendige Bedingung (Satz 4.2.1.)

Satz 4.4.6 (Hinreichende Bed. für lokale Extrema)

Wechselst f' in x_0 das Vorzeichen, so besitzt f in x_0 ein Extremum. Präzisierung: Gibt es eine Umgebung von x_0 mit $\begin{matrix} x < x_0 & => & f'(x) \leq 0 \ (\geq 0) \\ x > x_0 & => & f'(x) \geq 0 \ (\leq 0) \end{matrix}$, so besitzt f in x_0 ein lokales Min (Max).

Beweis: Folgt aus dem Mittelwertsatz

Satz 4.4.7

Sei f in x_0 p-mal diffbar mit $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(p-1)}(x_0) = 0 \quad f^{(p)}(x_0) \neq 0$, dann gilt:

p gerade => f besitzt in x_0 ein Extremum und zwar ein lokales Min (Max), falls $f^{(p)}(x_0) > 0 \ (< 0)$

p ungerade => f besitzt kein lokales Extremum

Beweis: Folgt aus Taylorformel 1.Form

Def. konvex (konkav)

$\forall_{x \in]x_0, x_1[} \ f(x) \leq (\geq) f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$ analog streng konvex, streng konkav

$\forall_{x \in]x_0, x_1[} \ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq (\geq) \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$

Satz 4.4.8 (Konvexitätskriterien)

Für eine auf dem Intervall I stetige und im Inneren diffbare Funktion gilt:

1. f ist (streng) konvex ⇔ f' ist (streng) monoton
2. f ist konvex ⇔ f''(x) ≥ 0
3. f ist streng konvex ⇔ f''(x) ≥ 0 und in keinem nichttrivialen Intervall 0

Beweis: a) => Folgt durch Grenzwertbetrachtung <= MWS b) und c) nach Satz 4.2.4.

Def. Wendepunkt

Wenn f in einer Umgebung mal unter und mal über der Tangente liegt.

Satz 4.4.9 (Notwendige Bed. für einen WP)

$f''(x_0) = 0$

Beweis: Folgt aus Taylorformel 1.Form

Satz 4.4.10 (Hinreichende Bed. für WP)

Wechselt f'' in einer Umgebung um x_0 das Vorzeichen, so liegt ein WP vor.

Beweis: Folgt aus Taylorformel 2.Form

Satz 4.4.11

Sei f in x_0 p-mal diffbar mit $f''(x_0) = ... = f^{(p-1)}(x_0) = 0 \quad f^{(p)}(x_0) \neq 0$, dann gilt:

p ungerade => f besitzt in x_0 einen Wendepunkt
p gerade => f besitzt in x_0 keinen Wendepunkt

Beweis: Folgt aus Taylorformel 1.Form

Das Riemannsche Integral

Def. Zerlegung / Feinheit einer Zerlegung / Riemannsche Obersumme / Untersumme / Varianz

Die inf und max in den Ober- und Untersummen existieren, da f als beschränkt vorausgesetzt wurde.

Def. Riemannsches Oberintegral und Riemannsches Unterintegral

Existieren, da gilt $-M(b-a) \leq \underline{R}_f(Z) \leq \overline{R}_f(Z) \leq M(b-a)$

Hilfssatz 1

a) Für eine Feinere Zerlegung Z' gilt: $\underline{R}_f(Z) \le \underline{R}_f(Z')$ $\quad \overline{R}_f(Z') \ge \overline{R}_f(Z)$

b) $\underline{R}_f \le \overline{R}_f$

Beweis: a) Z' enthält einen Punkt mehr. entsprechend für mehr. b) Betrachtung der gemeinsamen Verfeinerung

Def. R-Integral

Wenn Riemannsches Ober- und Unterintegral übereinstimmen.

Satz 4.5.1 (Einfacheres Kriterium für R-Integrierbarkeit)

Eine beschränkte Fkt f auf [a,b] ist genau dann R-integrierbar, wenn es zu jedem ε>0 eine Zerlegung Z von [a,b] gibt mit $V_f(Z) = \overline{R}_f(Z) - \underline{R}_f(Z) < \varepsilon$

Beweis: => Folgt aus Def. von Infimum und Supremum <= logisch

Satz 4.5.2

a) Jede stetige Funktion f: [a,b] $\to \mathbb{R}$ ist integrierbar
b) Jede monotone Funktion f: [a,b] $\to \mathbb{R}$ ist integrierbar

Beweis: a) f glm. stetig Varianzabschätzung b) monoton, Varianz berechenbar, N groß

Verschärfung: Man kann zeigen, dass jede beschränkte Fkt f: [a,b] $\to \mathbb{R}$, die bis auf endlich viele Ausnahmen stetig ist (sogar abzählbar viele Ausnahmen) ebenfalls R-integrierbar ist.

Def. Riemannsche Summe / Zwischenpunktvektor

$$R_f(Z,\overline{x}) = \sum_{k=1}^{N} f(\overline{x}) \cdot \Delta x_k$$

Hilfssatz 2

Bei einer R-integrierbaren Fkt f: [a,b] $\to \mathbb{R}$ gilt für beliebige Riemannsche Summen

$$\left| R_f(Z,\overline{x}) - \int_a^b f(x)dx \right| \le V_f(Z)$$

Beweis: Alles zwischen riemannschem Ober- und Unterintegral

Hilfssatz 3

Komischer Satz und noch komischer Beweis

Satz 4.5.3

f: [a,b] $\to \mathbb{R}$ sei R-integrierbar. Dann gilt für eine beliebige Folge von Zerlegungen von [a,b] und für jede Folge von zugehörigen Zwischenpunktsvektoren:

$$\lim_{l\to\infty} \|Z_l\| = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{l\to\infty} R_f(Z_l, \overline{x}_l) = \int_a^b f(x)dx$$

Beweis: Folgt direkt aus HS2 und 3

Korollar:

f: [a,b] $\to \mathbb{R}$ sei R-integrierbar. Dann gilt für jede Wahl von Z und $\overline{x}$

$$\|Z\| = \delta \;\Rightarrow\; \left| R_f(Z,\overline{x}) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Kurzschreibweise:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|Z\|\to 0} R_f(Z,\overline{x}) = \lim_{\|Z\|\to 0} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\overline{x}_k)\Delta x_k$$

Satz 4.5.4

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

Beweis: Abschätzung der Varianzen zum Beweis der Integrierbarkeit, Vergleich der Riemannschen Summen zur Abschätzung Riemannscher Integrale

Satz 4.5.5 (Rechenregeln für integr. Fkt)

linear, Skalar herausziehen, f(x) ≤ g(x) dann auch die Integrale

Satz 4.5.6

Bei Integralen Grenzen anschließbar, und auch auf jedem Teilintervall integrierbar

Folgerung:

Für eine R – integrierbare Abbildung f: [a,b] $\to \mathbb{R}$ gilt

$$\forall_{x\in[a,b]} |f(x)| \le M \;\; => \left|\int_a^b f(x)dx\right| \le M(b-a)$$

Satz 4.5.7 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

f sei auf [a,b] stetig, dann gibt es ein $\overline{x} \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)dx = f(\overline{x})\cdot(b-a)$

Beweis: Rückführung auf normalen MWS

Def. lokal R-integrierbar / Integralfunktion

Satz 4.5.8 (1. Hauptsatz der Differential und Integralrechnung)

f: $I \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei lokal R-integrierbar $c \in I$ beliebig. Dann gilt für die R-Integralfunktion

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)dt$$

a) F_c ist stetig („Integration macht stetig")
b) ist f in x_0 stetig, so ist F_c in x_0 sogar diffbar mit $F_c'(x_0) = f(x_0)$ („Integration stetiger Fkt. macht glatt)

Folgerung: Ist f stetig, so liefert jede R-Integralfunktion eine Stammfunktion von f.

Beweis: a) Folgt mit Folgerung 4.5.6 b) Stetigkeit umformen bis Differenzenquotient

Satz 4.5.9 (2. Hauptsatz der Differential und Integralrechnung)

f: $I \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei lokal R-integrierbar und besitzt eine Stammfunktion F. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Beweis: MWS rückwerz anwenden, Teleskopsumme

Achtung: Aus lokal R integrierbar folgt nicht die Existenz einer Stammfunktion und umgekehrt.

Anwendung des Hauptsatztes

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\frac{k}{N}\right)=\int_0^1 f(x)dx$$

Satz 4.5.10 (Taylorscher Satz, Integralform)

f: $I \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei p+1-mal diffbar sowie $f^{(p+1)}$ R-integrierbar. Dann gilt:

$$\forall_{x\in I}\ f(x)=T_p|_{x_0}(x)+\frac{1}{p!}\int_{x_0}^{x} f^{(p+1)}(t)\cdot(x-t)^p$$ (Integralform des Restglieds)

Beweis: Vollständige Induktion

Länge parametrisierter Kurven

Eine C^1 Abb $t\in[a,b]\to c(t)\in\mathbb{R}^n$ kann als par. Darstellung einer Raumkurve aufgefasst werden.

Approximation der Länge durch einen Polygonzug. $l(Z)=\sum_{k=1}^{N}\left|c(t_k)-c(t_{k-1})\right|$. Anwendung des MWS auf die einzelnen Komponenten und Verringerung der Feinheit liefern:

Satz 4.5.11

Die para. Kurve t sei stetig diffbar. Dann konvergieren die Längen einbeschriebener Sehnenpoygonzüge für $\|Z\|\to 0$ gegen $l:=\int_a^b\left|\dot c(t)\right|dt$

Uneigentliche R-Integrale

Def uneigentlich R-integrierbar

Falls der Limes existiert ist es uneigentlich integrierbar.
Bemerkung: Uneigentliche R-Integrale haben formal große Ähnlichkeit mit unendl. Funktionsreihen. Es gelten auch analoge Konvergenzkriterien (Cauchy-Kriterium, Majorantenkriterium)

Satz 4.5.12 (Integralkriterium für unendliche Reihen)

Sei $f:[m,\infty[\to\mathbb{R}\ (m\in\mathbb{N}_0)$ nicht negativ und monoton fallend. Dann existiert:

$c:\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=m}^{n} f(k)-\int_m^n f(t)dt\right)\ \ mit\ \ 0\le c\le f(m)$ Insbesondere gilt: $\sum_{k=m}^{\infty} f(k)\ konv.\Leftrightarrow\int_m^{\infty} f(t)dt\ konv.$

Beweis: Monoton Fallend und beschränkt => Konvergent

Beispiel: Existenz der Eulerschen Konstante $C=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\ -\ \log n\right)$

Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen

Funktionen $f:G\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\qquad (x_1,\dots,x_n)\to f(x)=f(x_1,\dots,x_n)$. Dabei ist G ein Gebiet also offen und zusammenhängend.

Partielle Diffbarkeit

Def. partielle Abbildungen / partielle Abbildung diffbar

$x_k\to f(x)=f(\dot x_1,\dot x_2,\dots,x_k,\dots,\dot x_n)$

Bemerkung: Mann fasst die übrigen Argumente als konstant auf. Man interessiert sich also nur für achsenparallele Geraden.

Def. p-mal partielle diffbar, p-mal stetig diffbar

Schlechte Eigenschaften:
- Sie brauchen nicht stetig zu sein
- part. Differentiation hängt i.a. von der Reihenfolge ab

Totale Diffbarkeit

Def. total diffbar

Wenn es in $\dot{x}$ stetige Fkt $\Delta_1, \Delta_2, .., \Delta_n$ gibt mit: $\forall_{x\in G} \quad f(x) = f(\dot{x}) + \sum_{k=1}^{n} \Delta_k(x)(x_k - \dot{x}_k)$

Gradient: $grad\ f(\dot{x}) = \left(\Delta_1(\dot{x}), ..., \Delta_n(\dot{x})\right)^T$ (unabhängig von der Auswahl der $\Delta_1, \Delta_2, .., \Delta_n$)

Geometrische Interpretation:

Dies ist äquivalent zu: $< \begin{pmatrix} \Delta_1(x) \\ \vdots \\ \Delta_n(x) \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ f(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \\ f(\dot{x}) \end{pmatrix} >$ Hesse-Normal-Form einer Sekantenhyperebene, verwendet man den Gradienten statt $\Delta_1, \Delta_2, .., \Delta_n$, so ist es die Tangentialhyperebene.

Ist $f: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vektorwertig und komponentenweise total diffbar, so kann man die für jedes j=1,…, m existierenden Vektorfelder Zeilenweise zu einem Matrixfeld Zusammenfassen und erhält:

Satz 5.1.1

Eine Abb. ist genau dann in $\dot{x}$ diffbar, wenn ein in $\dot{x}$ stetiges Matrixfeld $\Delta(x) \in M_{mxn}(\mathbb{R})$ existiert mit $f(x) = f(\dot{x}) + \Delta(x)\ (x - \dot{x})$.

Die Matrix $Df(\dot{x}) = \Delta(x_0)$ heißt Funktionalmatrix oder Jacobimatrix von f in $\dot{x}$.

Satz 5.1.2

Eine in x_0 total diffbare Abb. $f: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist dort auch partiell diffbar und es gilt:

$Df(\dot{x}) = \left(\partial_k f_j(\dot{x})\right)_{\substack{j=1,...,m \\ k=1,...,n}}$ bzw. für m=1 $\quad grad\ f(\dot{x}) = \left(\partial_1 f(\dot{x}), ..., \partial_n f(\dot{x})\right)^T$

Beweis: o.E. m=1 Folgt aus Differenzenquotient.

Kennzeichnung 2

Eine Abbildung $f: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann total diffbar, wenn sie sich linear approximieren lässt, d.h. wenn eine Matrix $A = Df(\dot{x})$ existiert mit $f(x) = f(\dot{x}) + A(x - \dot{x}) + R(x)$ mit einem Restglied $R(x) = o(|x - \dot{x}|)$.

Beweis: Analog zum Eindimensionalen, Beweis mit CS-Ungleichung

Satz 5.1.3

$f: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sei in $\dot{x}$ stetig partiell diffbar. Dann ist sie dort auch total diffbar.

Beweis: f(x) – f(x_0) aufspalten in Teleskopsumme. Eindim. MWS auf alle Teile, die dann stetig sind.

Def. p-mal total diffbar, p-mal stetig diffbar

Es gilt: f in x_0 p-mal stetig diffbar <=> f in x_0 p-mal stetig partiell diffbar

Satz 5.1.4 Rechenregeln für diffbare Abb

1. Für f+g, fg und f/g üblichen Rechenregeln

2. Kettenregel: $f: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ g: \tilde{G} \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$
   $D(g \circ f)(\dot{x}) = D(g)(f(\dot{x})) \cdot Df(\dot{x})$ oder
   $$\forall_{i=1}^{p} \forall_{k=1}^{n}\ \partial_k \left(g \circ f\right)_i = \sum_{j=1}^{m} \left(\partial_j\, g_i\right)\left(f(\dot{x})\right) \cdot \partial_k\, f_j(\dot{x})$$

Satz 5.1.5 (Satz von Schwarz)

$f: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sei in x_0 2-mal total diffbar, dann sind die 2. part. Ableitung in x_0 vertauschbar.

Beweis: Hilfsfunktionen, als Folgerung auch beliebig vertauschbar bei p-mal total diffbar.

Die Taylorschen Sätze

Darstellung von Polynomen

Satz 5.2.1

$f: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sei in O $\in G$ p-mal diffbar. Dann gibt es genau ein Polynom T_p höchstens vom Grad p mit $\forall_{r=0}^{p}\ \forall_{l_1,\ldots,l_r=0}^{n}\ \partial_{l_1,\ldots,l_r} P(0) = \partial_{l_1,\ldots,l_r} f(0)$ nämlich:

$$T_p(x) = \sum_{r=0}^{p} \frac{1}{p!} \sum_{k_1,\ldots k_r=1}^{n} \partial_{k_1,\ldots,k_r} f(0) \cdot x_{k_1} \cdot \ldots \cdot x_{k_r}$$

Bemerkung: Bei Entwicklung um $\dot{x} \neq 0$ ersetze man 0 durch $\dot{x}$ und x_{k_j} durch $x_{k_j} - \dot{x}_{k_j}$

Beweis: Unter einer Symmetrievorrausetzung kann man es mit vollständiger Induktion zeigen

Satz 5.2.2 (Taylorsche Satz 2. Form)

$f: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei in einer Umgebung um 0 (p+1)-mal diffbar. Dann gibt es zu jedem x ein

$\vartheta \in]0,1[$ mit: $f(x) = T_p(x) + \dfrac{1}{p+1!} \displaystyle\sum_{k_1,\ldots k_{p+1}=1}^{n} \partial_{k_1,\ldots,k_{p+1}} f(\vartheta x) \cdot x_{k_1} \cdot \ldots \cdot x_{k_{p+1}}$ (Lagrange Form)

Satz 5.2.3 (Taylorsche Satz 1. Form)

$f: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei in einer Umgebung um 0 (p+1)-mal diffbar. Dann gibt es in x=0 stetige Fkt mit

$f(x) = T_p(x) + \dfrac{1}{p+1!} \displaystyle\sum_{k_1,\ldots k_{p+1}=1}^{n} \Delta_{k_1,\ldots,k_{p+1}}(x) \cdot x_{k_1} \cdot \ldots \cdot x_{k_{p+1}}$ und $\Delta_{k_1,\ldots,k_{p+1}}(0) = \partial_{k_1,\ldots,k_{p+1}} f(0)$

Folgerung

$f: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei in einer Umgebung um 0 (p+1)-mal diffbar. Dann gilt:

$f(x) = T_p(x) + o\left(|x|^p\right)$ (mit Landau o)

Spezialfälle

p = 1 bei beliebigem Entwicklungspunkt $\dot{x}$. Mit dem Gradienten $\mathit{grad}\ f(x) = \left(\partial_k f(x)\right)_{k=1,\ldots n}$ und mit der HESSE-Matrix $H_f(x) = \left(\partial_l\, \partial_k\ f(x)\right)_{k,l=1,\ldots n}$ (symmetrisch falls 2-mal diffbar) gilt:

$$f(x) = f(\dot{x}) + \langle \mathit{grad}\ f(\dot{x}), x - \dot{x} \rangle + \frac{1}{2}\left(\left(x-\dot{x}\right)^T \Delta(x)\left(x-\dot{x}\right)\right) \quad \mathit{mit} \quad \Delta(\dot{x}) = H_f(\dot{x})$$

$$f(x) = f(\dot{x}) + \langle \mathit{grad}\ f(\dot{x}), x - \dot{x} \rangle + \frac{1}{2}\left(\left(x-\dot{x}\right)^T H_f(\overline{x})\left(x-\dot{x}\right)\right) \quad \mathit{mit} \quad \overline{x} = \dot{x} + \vartheta(x-\dot{x}) \quad \mathit{mit}\ \vartheta \in]0,1[$$

$$f(x) = f(\dot{x}) + \langle \mathit{grad}\ f(\dot{x}), x - \dot{x} \rangle + \frac{1}{2}\left(\left(x-\dot{x}\right)^T H_f(\dot{x})\left(x-\dot{x}\right)\right) + o\left(|x-\dot{x}|^2\right)$$

Lokale Extrema

Def. Lokales Minimum / lokales Maximum

Wenn eine Umgebung von $\dot{x}$ existiert mit $f(x) \geq f(\dot{x})$.

Satz 5.2.1 (Notwendige Bedingung für lokales Extremum)

$grad\ f(\dot{x}) = 0$

Beweis: Jede partielle Ableitung besitzt lokales Extremum. Fertig

Bemerkung: Diese Punkte heißen kritische Punkte und sind „Kandidaten“ für lokale Extrema.

Def. Matrix positiv definit / semidefinit / indefinit

$x^T Ax > 0$ / $x^T Ax \geq 0$ / mal größer mal kleiner

Satz 5.3.2

$f: G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei in $\dot{x}$ 2-mal diffbar mit $grad\ f(\dot{x}) = 0$. Dann gilt mit der Hessematrix H_f:

1. H_f positiv (negativ) definit => f besitzt in $\dot{x}$ ein lokales Minimum (Maximum)
2. H_f indefinit => f besitzt in $\dot{x}$ kein Extremum
3. Bei semidefinit keine Aussage möglich

Beweis: 1.) Folgerung aus Taylorscher Satz (Folgerung) 2. betrachte y und z für die gilt $y^T Ay < 0$ und $z^T Az > 0$

Satz 5.3.3

Eine symmetrische Matrix ist genau dann

- positiv (negativ) definit, wenn alle Eigenwerte positiv (negativ) sind
- positiv (negativ) semidefinit, wenn alle Eigenwerte ≥ 0 (≤ 0) sind
- indefinit, wenn positive und negative Eigenwerte existieren

Satz 5.3.4 (Kriterium von Hurwitz)

Eine symmetrische Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn die k-reihigen Haupt-Unterdeterminanten positiv sind.

Bemerkung: Für negativ definit prüfe –A auf positive Definitheit.

Absolute (globale) Extrema

f stetig und im inneren 2-mal diffbar.

1. Fall: D ist kompakt. Dann ex. ein globales Minimum und Maximum.
Die Extrema können:

a) im Inneren angenommen werden (dann sind es auch lok. Extrema)
b) auf dem Rande liegen (durch gesonderte Betrachtung auffindbar)

Rezept: Bestimmung aller kritischen Punkte und Randextrema. Der kleinste Wert liefert das abs. Minimum, der größte das abs. Maximum.

2. Fall: D nicht kompakt. Dann brauchen überhaupt keine Extrema zu existieren (können aber).
Kein Rezept.